

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра *математики, информационных систем  
и программного обеспечения*

**Методические указания  
к самостоятельной работе**

по дисциплине

**Б1.О.05.02 Основы математического анализа**

название дисциплины

для специальности

**09.03.02**

код направления подготовки

**«Информационные системы и технологии. Профиль подготовки «Геоинформационные системы»**

наименование направления подготовки

форма обучения: **очная\заочная**

Мурманск  
2020

Составитель – Литвиненко С.И., ст. преподаватель кафедры математики, информационных систем и программного обеспечения Мурманского государственного технического университета.

## Общие методические указания

Методические указания предназначены для обучающихся института арктических технологий очной формы обучения для изучения дисциплины «Основы математического анализа» по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии (уровень бакалавриата). Профиль: Геоинформационные системы».

В результате изучения дисциплины студент должен:

### **Знать:**

- основные свойства пределов последовательности и функций;
- основные приемы вычисления пределов последовательностей и функций;
- замечательные пределы;
- бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства;
- методы дифференциального и интегрального исчисления ФОО, ФНО и ФКО;
- ряды и их сходимость, разложение элементарных функций в ряд;
- разложение функции в ряд Фурье в вещественной и комплексной формах;

### **Уметь:**

- вычислять пределы последовательностей и функций;
- исследовать функции, строить их графики;
- интегрировать функции методом замены переменной интегрирования, подведением под знак дифференциала, по частям, разложением на простейшие дроби, используя тригонометрические подстановки;
- исследовать числовые и функциональные ряды на сходимость;
- раскладывать функцию в ряд Фурье;
- дифференцировать и интегрировать функцию комплексного переменного.

### **Владеть:**

- аппаратом дифференциального и интегрального исчисления ФОО, ФНО и ФКО.

**Целью** являются систематизация, расширение и углубление знаний, полученных при теоретическом изучении дисциплины, с тем, чтобы обучающийся использования знаний на практике. Одной из важных целей работы является совершенствование умений работать самостоятельно с информационными источниками.

Процесс изучения дисциплины «Основы математического анализа» направлен на формирование компетенций в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии», представленных в таблице.

№ п/п	Код и содержание компетенции	Степень реализации компетенции	Индикаторы сформированности компетенций
1	2	3	4
1	ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общепрофессиональные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	Компетенция реализуется в части «Способность применять естественнонаучные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического исследования .	<b>Знать:</b> основы математики. <b>Уметь:</b> решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общепрофессиональных знаний, методов математического анализа и моделирования. <b>Иметь навыки:</b> теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.
2	ОПК - 8. Способен применять математические модели, методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем.	Компетенция реализуется в части «Способность использовать математические методы обработки, результатов исследований»	<b>Знать:</b> методологию и основные методы математического моделирования, классификацию и условия применения моделей, основные методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем, инструментальные средства моделирования и проектирования информационных и автоматизированных систем

			<p><b>Уметь:</b> применять математические модели, методы и средства проектирования и автоматизации систем на практике</p> <p><b>Иметь навыки:</b> использования методов исследования математического анализа; моделирования и проектирования информационных и автоматизированных систем.</p>
--	--	--	--

### ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ п\п	Содержание разделов (модулей), тем дисциплины	Кол-во часов
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
	<b>1 семестр (очное)/зима(заочное)</b>	
1	<p><b><i>Функция. Предел и непрерывность функции</i></b></p> <p>Понятие множества. Функция. Основные свойства функций. Элементарные функции и их графики. Предел последовательности и его свойства. Предел функции. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Теоремы о пределах. Замечательные пределы. Эквивалентности.</p> <p>Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва и их классификация. Теоремы о непрерывных функциях. Свойства функций, непрерывных на отрезке.</p>	20/20
2	<p><b><i>Дифференциальное исчисление функции одной переменной</i></b></p> <p>Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Таблица производных основных элементарных функций. Теоремы о производных. Производная сложной, обратной функции. Логарифмическая производная. Производные высших порядков.</p> <p>Касательная и нормаль к плоской кривой.</p> <p>Понятие дифференциала и его геометрический смысл. Применение дифференциала для приближенных вычислений.</p> <p>Основные теоремы дифференцирования. Формула Тейлора. Применение формулы для вычисления пределов. Раскрытие неопределенностей.</p> <p>Исследование функций и построение графиков с помощью производной.</p>	18/40
3	<b><i>Алгебра комплексных чисел.</i></b>	6/6
4	<p><b><i>Интегральное исчисление функции одной переменной</i></b></p> <p>Первообразная и неопределенный интеграл, основные свойства. Таблица интегралов. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование; метод подстановки или поведение под знак дифференциала; интегрирование по частям; интегрирование рациональных выражений; тригонометрические подстановки; интегрирование иррациональных выражений.</p> <p>Понятие интегральной суммы. Определенный интеграл и его свойства.</p> <p>Геометрический и экономический смысл интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.</p> <p>Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.</p> <p>Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей фигур; объемов тел вращения; длины дуги кривой.</p>	20/60
	<b>Всего в 1-м семестр</b>	64/126
	<b>2 семестр (очное)/лето (заочное)</b>	
4	<p><b><i>Теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных. Векторный анализ и элементы теории поля</i></b></p> <p>Функции нескольких переменных (ФНП). Способы задания. Линии уровня. Предел и непрерывность ФНП. Частные приращения и полное приращение функции. Частные производные ФНП. Частные дифференциалы и полный дифференциал ФНП. Частные производные высших порядков. Градиент и производная по направлению ФНП в точке.</p> <p>Дифференциальные операторы: градиент, дивергенция, ротор поля. Формула Тейлора для функции двух переменных.</p>	24/60

	Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции в области. Двойной интеграл. Сведение двойного интеграла к повторному.	
5	<b>Ряды</b> Числовые ряды. Основные понятия и определения. Необходимый признак сходимости ряда. Знакоположительные ряды, признаки сходимости: 1 и 2-й признаки сравнения, признаки Коши и Даламбера, интегральный признак. Знакопередающиеся ряды, их абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Основные понятия. Функциональные ряды. Сходимость функциональных рядов. Степенные ряды. Радиус и область сходимости степенного ряда. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена. Приложение степенных рядов для приближенного вычисления значений функций и определенных интегралов. Ряды Фурье.	26/50
8	<b>Элементы теории функции комплексного переменного</b> Основные понятия. Предел и непрерывность. Основные элементарные функции. Дифференцирование. Условия Эйлера – Даламбера. Аналитическая функция. Дифференциал. Геометрический смысл модуля и аргумента. Интегрирование функции комплексного переменного.	14/41
	<b>Всего во 2-м семестре (очное)/ лето (заочное):</b>	64/151
	<b>Итого за год</b>	128/277

## СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

### *Функции. Предел и непрерывность*

#### *Теория пределов последовательностей и функций*

##### **Содержание темы:**

- Понятие функции.
- Основные характеристики.
- Виды функций.
- Числовые последовательности и предел числовой последовательности.
- Предел функции в точке, односторонние пределы, бесконечные пределы.
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
- Теоремы о пределах.
- Замечательные пределы.
- Непрерывность функции.

##### **Цели изучения темы:**

- освоить основные принципы теории пределов

##### **Требования к уровню освоения содержания темы**

###### **Изучив данную тему, студент должен:**

- **знать и уметь:**
  - определение, способы задания, виды, основные характеристики функций;
  - определение числовой последовательности;
  - находить предел последовательности;
  - определение предела функции в точке, односторонние и бесконечные пределы;
  - находить предел функции в точке, односторонние и бесконечные пределы;
  - определение б/м и б\б функций, связь между ними;
  - свойства б/м;
  - основные теоремы о пределах;
  - замечательные пределы;
  - эквивалентные б/м и их применение;
  - непрерывность функции в точке, в интервале и на отрезке;
  - точки разрыва функции.

##### **Методические рекомендации по изучению темы**

Изучить соответствующий учебный материал в рекомендуемой литературе.

Ответить на вопросы.

##### **Рекомендуемая литература**

Основная: [1,2].

##### **Вопросы, задачи и упражнения для самопроверки**

1. Дать определение функции.
2. Перечислить способы задания функции.
3. Сформулируйте характеристики функции: область определения, множество значений, четность, периодичность, монотонность, промежутки знакопостоянства, точки экстремума.
4. Дать понятие обратной, сложной, алгебраической, элементарной функций
5. Охарактеризовать основные элементарные функции.
6. Дать определение числовой последовательности.
7. Что называется пределом последовательности.
8. Способы вычисления пределов последовательности.
9. Сформулируйте определение предела функции в точке, односторонних пределов, бесконечных пределов.
10. Определение б\м б\б, связь между ними.
11. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
12. I и II замечательные пределы.
13. Основные способы вычисления пределов.
14. Применение эквивалентных б\м при вычислении пределов и приближенных вычислениях.
15. Дать определение непрерывности функции в точке, в интервале, на отрезке.
16. Классификация точек разрыва функции.

17. Докажите основные теоремы о непрерывных функциях.
18. Выполнить соответствующие задания ИДЗ 5.1, 5.2 [ 5].

### *Дифференциальное исчисление функции одной переменной*

#### **Содержание темы:**

- Определение производной
- Вычисление производной на основе определения
- Вычисления производной первого порядка, используя правила и формулы
- Вычисление производных высших порядков
- Производные сложной ф, обратной, неявной, заданной параметрически функций
- Основные теоремы дифференцирования
- Исследование функций при помощи производной

#### **Цели изучения темы:**

- Показать применение методов полного исследования функции для прогнозов в других науках.

#### **Задачи изучения темы:**

- Изучить особенности полного исследования функции и построение графиков функции.

#### **Требования к уровню освоения содержания темы**

##### **Изучив данную тему, студент должен:**

- **знать и уметь:**
  - определение производной, геометрический и физический смысл
  - уравнение касательной и нормали
  - необходимое условие дифференцируемости функции
  - производные элементарных, сложных, гиперболических функций
  - правила дифференцирования
  - дифференцирование неявных функций, заданных параметрически
  - производные высших порядков, логарифмическое дифференцирование
  - основные теоремы дифференцирования
  - применять дифференциал к приближенным вычислениям
  - исследовать функцию при помощи производной.

#### **Методические рекомендации по изучению темы**

Изучить соответствующий учебный материал в рекомендуемой литературе.

Ответить на вопросы.

#### **Рекомендуемая литература**

Основная: [1, 2].

#### **Вопросы, задачи и упражнения для самопроверки**

1. Привести примеры задач, приводящих к понятию производной.
2. Дать определение производной.
3. Сформулировать правила вычисления производной.
4. Производная сложной, обратной, показательно-степенной, неявной, гиперболических функций, параметрически заданной функции.
5. Сформулируйте основные теоремы дифференцирования.
6. Сформулируйте определения и теоремы об основных характеристиках функции: возрастание и убывание, максимум и минимум, наибольшее и наименьшее значение, выпуклость и вогнутость.
7. Определение и правила нахождения асимптот графика функции.
8. Приведите схему полного исследования функции.
9. Формула Тейлора и её применение.
10. Выполнить соответствующие задания ИДЗ 6.1 – 6.4 [ 5].

### *Интегральное исчисление функции одной переменной*

#### **Неопределенный интеграл**

#### **Содержание темы:**

- Методы непосредственного интегрирования
- Простейшие замены переменной
- Интегрирование дробно-рациональных функций
- Интегрирование по частям

- Интегралы, сводящиеся к интегрированию рациональных выражений
- Интегрирование иррациональных выражений

**Цели изучения темы:**

- понять роль интегрального исчисления при исследовании процессов экономического характера

**Задачи изучения темы:**

- изучить основные методы интегрирования

**Требования к уровню освоения содержания темы**

**Изучив данную тему, студент должен:**

- **знать и уметь:**
  - понятие неопределенного интеграла
  - свойства неопределенного интеграла
  - основные методы интегрирования

**Методические рекомендации по изучению темы**

Изучить соответствующий учебный материал в рекомендуемой литературе.

Ответить на вопросы.

**Рекомендуемая литература**

Основная: [1,2].

**Вопросы, задачи и упражнения для самопроверки**

1. Понятие неопределенного интеграла.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица основных неопределенных интегралов.
4. Метод непосредственного интегрирования.
5. Метод интегрирования заменой переменной.
6. Интегрирование по частям.
7. Интегрирование рациональных функций.
8. Интегрирование тригонометрических функций.
9. Интегрирование иррациональных функций.
10. Выполнить соответствующие задания ИДЗ 8.1 -8.4 [ 5]..

***Определенный интеграл, несобственный интеграл***

**Содержание темы:**

- Определенный интеграл как предел интегральной суммы.
- Приложения определенного интеграла.

**Цели изучения темы:**

- Познакомиться с особенностями вычисления и применения определенного интеграла.

**Задачи изучения темы:**

- узнать особенности вычисления определенного интеграла
- изучить методы интегрирования

**Требования к уровню освоения содержания темы**

**Изучив данную тему, студент должен:**

- **знать и уметь:**
  - определение определенного интеграла
  - определение несобственного интеграла
  - методы интегрирования
  - схемы применения определенного интеграла

**Методические рекомендации по изучению темы**

Изучить соответствующий учебный материал в рекомендуемой литературе.

Ответить на вопросы.

**Рекомендуемая литература**

Основная: [1,2].

**Вопросы, задачи и упражнения для самопроверки**

1. Показать, что определенный интеграл есть предел интегральной суммы.
2. Разъяснить понятия верхней и нижней суммы Дарбу.
3. Пояснить геометрический и физический смысл определенного интеграла.
4. Формула Ньютона-Лейбница.

5. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
6. Сформулируйте правила вычисления определенного интеграла.
7. Дать определение несобственного интеграла I и II рода.
8. Вычисление площадей плоских фигур.
9. Вычисление длины дуги плоской кривой.
10. Вычисление объема тела.
11. Объем тел вращения.
12. Вычисление площади поверхности тел вращения.
13. Приближенное вычисление определенного интеграла.
14. Выполнить соответствующие задания ИДЗ 9.1,9.2 [ 5].

### ***Функция нескольких переменных***

#### **Содержание темы:**

- Понятие функции нескольких переменных
- Линии и поверхности уровня
- Предел и непрерывность ФНП
- Производные и дифференциалы ФНП
- Производная по направлению
- Градиент ФНП
- Касательная плоскость и нормаль к поверхности
- Экстремум функции двух переменных
- Дифференциальные операторы: градиент, дивергенция, ротор векторного поля
- Формула Тейлора для функции двух переменных
- Вычисление двойного интеграла
- Простейшее приложения двойного интеграла

#### **Цели изучения темы:**

- Научиться исследовать ФНП

#### **Задачи изучения темы:**

- узнать особенности исследования ФНП
- научиться практическому применению ФНП

#### **Требования к уровню освоения содержания темы**

##### **Изучив данную тему, студент должен:**

- **знать и уметь:**
  - определение ФНП
  - находить предел, частные производные любого порядка, дифференциал ФНП
  - применять дифференциал ФНП к приближенным вычислениям
  - составлять уравнение касательной и нормали к поверхности
  - находить градиент функции и производную по направлению
  - исследовать ФНП
  - находить наибольшее и наименьшее значение функции.

#### **Методические рекомендации по изучению темы**

Изучить соответствующий учебный материал в рекомендуемой литературе.  
 Ответить на вопросы.

#### **Рекомендуемая литература**

Основная: [1,2].

#### **Вопросы для самопроверки**

1. ФНП основные понятия.
2. Предел функции.
3. Непрерывность функции двух переменных
4. Частные производные первого и второго порядка.
5. Полный дифференциал и применение к приближенным вычислениям.
6. Производная сложной и неявной функции.
7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
8. Градиент и производная по направлению.
9. Необходимое и достаточное условия экстремума.
10. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

## 11. Выполнить соответствующие задания ИДЗ 10.1,10.2 [ 5].

### *Ряды*

#### **Содержание темы:**

- Понятие числового и функционального ряда
- Признаки сходимости числовых рядов
- Степенные ряды
- Ортогональные и ортонормированные системы функций
- Ряды Фурье

#### **Цели изучения темы:**

- познакомиться с особенностями разложения функций в ряд

#### **Задачи изучения темы:**

- узнать признаки сходимости рядов
- научиться раскладывать произвольные функции в ряд
- применять степенные ряды к приближенным вычислениям

#### **Требования к уровню освоения содержания темы**

##### **Изучив данную тему, студент должен:**

- **знать и уметь:**
  - определение числового и функционального ряда
  - признаки сходимости рядов
  - степенные ряды как особый случай функциональных рядов
  - находить область сходимости функционального ряда
  - находить радиус сходимости степенного ряда
  - раскладывать функцию в ряд Тейлора и ряд Маклорена
  - приближенно вычислять значение функции, определенных интегралов, решение диф. уравнений.

#### **Методические рекомендации по изучению темы**

Изучить соответствующий учебный материал в рекомендуемой литературе.

Ответить на вопросы.

#### **Рекомендуемая литература**

Основная: [1].

#### **Вопросы, задачи и упражнения для самопроверки**

1. Числовые ряды: основные понятия.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши, интегральный признак.
4. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.
5. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов.
6. Функциональные ряды. Основные понятия.
7. Промежуток сходимости функционального ряда.
8. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
9. Разложение функций в степенные ряды.
10. Приближенное вычисление значений функций.
11. Приближенное вычисление определенных интегралов.
12. Приближенное решение дифф. уравнений.
13. Периодические функции. Периодические процессы.
14. Тригонометрический ряд Фурье.
15. Разложение в ряд Фурье периодических функций.
16. Представление непериодической функции рядом Фурье.
17. Комплексная форма ряда Фурье.
18. Выполнить соответствующие задания РГЗ ИДЗ 12.1-12.3 [ 5].

### *Функция комплексного переменного*

#### **Содержание темы:**

- Понятие ФКП

- Предел, непрерывность, дифференцируемость, интегрирование ФКП

**Цели изучения темы:**

- познакомиться с ФКП.

**Задачи изучения темы:**

- узнать особенности исследования ФКП.

**Требования к уровню освоения содержания темы**

**Изучив данную тему, студент должен:**

- **знать уметь:**
  - Определение ФКП и сопутствующих понятий.
  - Вычислять предел ФКП.
  - Основные элементарные функции комплексного переменного.
  - Дифференцировать ФКП. Условие Коши-Римана.
  - Определение аналитической функции.
  - Правила вычисления интеграла ФКП.
  - Ряды в комплексной плоскости.
  - Классификацию особых точек.

**Методические рекомендации по изучению темы**

Изучить соответствующий учебный материал в рекомендуемой литературе.  
Ответить на вопросы.

**Рекомендуемая литература**

Основная: [1].

**Вопросы, задачи и упражнения для самопроверки**

1. Определение ФКП и сопутствующих понятий.
2. Вычислять предел ФКП.
3. Основные элементарные функции комплексного переменного.
4. Дифференцировать ФКП. Условие Коши-Римана.
5. Определение аналитической функции.
6. Правила вычисления интеграла ФКП.
7. Ряды в комплексной плоскости.
8. Классификацию особых точек.
9. Выполнить соответствующие задания ИДЗ 15.1, 15.2[ 5].

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

### *Основные*

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М. : Айрис – пресс. 2009. 604 с. (МГТУ-(полный курс) 2015г. и ранее 321 экз.).
2. Ермаков, В. И. Сборник задач по высшей математике для экономистов. М.: ИНФРА-М. 2005. 574 с. (МГТУ 2005, 2003,2001 470 экз.).

### *Дополнительные*

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Учебное пособие для вузов. Ч1, 2.-М.: Высшая школа, любой год издания.
2. Запорожец Г. Руководство к решению задач по математическому анализу. Уч. пособие. Лань. 2014 [http://alexandr4784.narod.ru/zap\\_1.html](http://alexandr4784.narod.ru/zap_1.html).
3. Запорожец, Г. И.Руководство к решению задач по математическому анализу : учеб. пособие для вузов / Г. И. Запорожец. - Изд. 6-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2010 и ранее - 459, [1] с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). (МГТУ ,55 экз.).
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учебник для вузов. Т.1, II.-М.: Интеграл-Пресс, 2000.
5. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в 4-х частях). <http://idz-ryabushko.ru/sbornik-zadaniy/>
6. Шипачев В.С. Основы высшей математики; учебное пособие для ВУЗов. МОСКВА ЮРАЙ. . 496 с.(МГТУ 2012 и ранее 199 экз.).
7. Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Справочник по математике. – М.: Лист, 1999.

